# Développement : Théorème de Weierstrass

. Hervé Queffélec, Claude Zuily
Analyse pour l'agrégation, cours et exercices corrigés (p 518)

**Thm :** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.
Il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$P_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CVU} f$$

**Défi-ppt :** Module de continuité

$$\omega_f(h) = \sup \{ |f(v) - f(u)|, |u - v| \leq h \}$$

1) $\omega_f$ bien définie et croissante
2) $\lim_{h \to 0} \omega_f(h) = 0$
3) $\forall h_1, h_2 \geq 0 \quad \omega_f(h_1 + h_2) \leq \omega_f(h_1) + \omega_f(h_2)$
4) $\forall h, \lambda \geq 0 \quad \omega_f(\lambda h) \leq (\lambda + 1) \omega_f(h)$

1) Soit $f : [0 ; 1] \to \mathbb{R}$ continue
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ $B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k}$
Alors on a $\| f - B_n(f) \|_\infty \leq \frac{3}{2} \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'où la CVU

Soit $x \in [0 ; 1]$. Soit $n \geq 1$
Soit $S_n \sim \mathcal{B}(n, x)$

On a $E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underbrace{\mathbb{P}(S_n = k)}_{= \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}} = B_n(f)(x)$

D'où $|f(x) - B_n(f)(x)| = \left| E\left(f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) \right|$

$$\leq E\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right)$$

par déf de $\omega_f$

$$\leq E\left(\omega_f\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right)\right)$$

$$\leq E\left(\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{n} \left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right)\right)$$

point 4

$$\leq E\left(\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n}\left|x - \frac{S_n}{n}\right| + 1\right)\right)$$

linéarité

$$\leq \left(\sqrt{n}\, E\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right) + 1\right) \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Cauchy-Schwarz $E(X) \leq \sqrt{E(X^2)}$

$$\leq \left(\sqrt{n} \sqrt{E\left(\left(x - \frac{S_n}{n}\right)^2\right)} + 1\right) \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = x$

$$\leq \left(\sqrt{n} \sqrt{Var\left(\frac{S_n}{n}\right)} + 1\right) \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$Var(aX) = a^2 Var(X)$

$$\leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{Var(S_n)} + 1\right) \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$\leq \left(\sqrt{x(1-x)}+1\right) w_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ $\quad Var(S_n) = nx(1-x)$

$\leq \frac{3}{2} w_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ $\quad x \mapsto x(1-x)$ atteint son max en $x=\frac{1}{2}$

D'où $\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \frac{3}{2} w_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Posons $g : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(a+(b-a)x) = f\circ\phi(x) \end{cases}$ où $\phi : \begin{cases} [0,1] \to [a,b] \\ x \mapsto a+(b-a)x \end{cases}$

On pose $P_n = B_n \circ \phi^{-1}$ $\quad n \geq 0$

On a $\|g - B_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\shortparallel$

$\|f - \underbrace{B_n\circ\phi^{-1}}_{P_n}\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\quad$ D'où le résultat. $\square$

(Démo du lemme /défi-ppt)

(1) $\{|f(v)-f(u)|, |u-v| \leq h_1\} \subset \{|f(v)-f(u)|, |u-v| < h_2\}$
si $h_1 < h_2$

Passage au sup : $w_f(h_1) \leq w_f(h_2)$

(2) Heine : $f$ est uniformément continue

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, w_f(\delta) \leq \varepsilon$

Par croissance, $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall \eta \leq \delta, w_f(\eta) \leq w_f(\delta) \leq \varepsilon$

i.e. $\lim_{h\to 0} w_f(h) = 0$

(3) Soient $h_1, h_2 \geq 0$

Soient $x, y$ tels que $|x-y| \leq h_1+h_2$

Il existe $z \in [a;b]$ tel que $|x-z| \leq h_1$, $|y-z| \leq h_2$

Inégalité triangulaire $|f(x)-f(y)| \leq \underbrace{|f(x)-f(z)|}_{\leq w_f(h_1)} + \underbrace{|f(z)-f(y)|}_{\leq w_f(h_2)}$

+ Passage borne sup

(4) Soient $h, \lambda \geq 0$ on a $w_f(\lambda h) \leq w_f((\lfloor\lambda\rfloor+1)h)$ par (1)

$\leq (\lfloor\lambda\rfloor+1) w_f(h)$ par (2)

$\leq (\lambda+1) w_f(h)$

$\square$